

2025年度 神戸大学大学院システム情報学研究科  
博士課程前期課程 第二期入学試験問題  
数学

注意事項

- (1) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題1は、左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合、採点の対象となりません。
- (2) 解答欄が不足した場合は、裏面に書いてよろしい。ただし、表と上下を逆にしてください。
- (3) 受験番号と科目名の裏の部分には、何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

(1)(1-a) 正の実数  $t > 0$  に対し, 積分  $\int_0^t xe^{-x} dx$  の値を求めよ.

(1-b) 広義積分  $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$  の値を求めよ.

(1-c) 広義積分  $\int_0^{\infty} xe^{-x} \sin(\sqrt{x}) dx$  が収束することを示せ.

(2) 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  と行列  $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$  を考える.

(2-a)  $A$  の固有値と固有ベクトルをすべて求め,  $A$  が対角化可能かどうか判定せよ.

(2-b)  $B$  の固有値と固有ベクトルをすべて求め,  $B$  が対角化可能かどうか判定せよ.

2. 複素関数  $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$  を考える. また, 複素平面上の原点を中心として反時計方向に  
向き付けられた半径  $\frac{1}{2}$  の円を  $C$  とする.

(1) 領域  $|z| < 1$  で, 複素関数  $\frac{1}{1-z}$  の  $z=0$  を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2)  $f(z)$  の  $z=0$  を中心とするローラン展開を求めよ.

(3) 複素積分  $\int_C f(z) dz$  の値を求めよ.

(4) 複素積分  $\int_C \frac{f(z)}{1-z} dz$  の値を求めよ.

3.  $y = y(x)$  に関する Riccati の微分方程式

$$y' + y^2 + 2y + 1 = 0 \quad (*)$$

を考える.

(1)  $y' = 0$  を満たす方程式 (\*) の解を  $y_1 = y_1(x)$  と表わす.  $y_1$  を求めよ.

(2) 変数変換  $u = y - y_1$  により,  $u$  に関する微分方程式を導け.

(3) (2) で導いた微分方程式を解き, 初期条件  $y(0) = 0$  を満たす方程式 (\*) の解  $y$  を求めよ.