

2025年度 神戸大学大学院システム情報学研究科
博士課程前期課程 第三期入学試験問題
数学

注意事項

- (1) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題1は、左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合、採点の対象となりません。
- (2) 解答欄が不足した場合は、裏面に書いてよろしい。ただし、表と上下を逆にしてください。
- (3) 受験番号と科目名の裏の部分には、何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

(1) xy 平面上の集合 $D = \{(x, y) : y > x^2\}$ において関数 $f(x, y) = y - x - \log(y - x^2)$ を考える.

(1-a) 偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めよ.

(1-b) D における $f(x, y)$ の極値を求めよ. また, それが極大値か極小値かを答えよ.

(2) a を実定数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} 2a-1 & a & a-1 \\ a & 2a & a \\ a-1 & a & 2a-1 \end{pmatrix}$ を考える.

(2-a) 行列 A の行列式 $|A|$ に対して $|A| = 0$ を満たす a の値を求めよ.

(2-b) 行列 A の階数 $\text{rank}(A)$ を求めよ.

2. 複素関数 $w = f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ を考える. 複素数 z の実部, 虚部をそれぞれ x, y とする.

(1) $x = 0$ かつ $y > 0$ のとき, w は実数であることを示せ.

(2) $y = 0$ のとき, $|w|$ の値を求めよ.

(3) $|w| < 1$ となるための y の条件を求めよ.

(4) r を正の実数とし, 複素平面上の原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径 r の円を C_r とする. 複素積分 $\int_{C_{0.5}} f(z) dz$ と $\int_{C_{1.5}} f(z) dz$ の値を求めよ.

3. $y = y(x), x > 0$ を未知関数とする二つのオイラーの微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (*)$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = x^4 \quad (**)$$

を考える. m, A は実定数とする.

(1) $y = x^m$ が $(*)$ の解であるときの m の値を求めよ.

(2) $(*)$ の一般解を求めよ.

(3) $y = Ax^4$ が $(**)$ の解であるときの A の値を求めよ.

(4) $(**)$ の一般解を求めよ.