

2025年度 神戸大学大学院システム情報学研究科
博士課程前期課程 入学試験問題
数学

注意事項

- (1) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題1は、左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合、採点の対象となりません。
- (2) 解答欄が不足した場合は、裏面に書いてよろしい。ただし、表と上下を逆にしてください。
- (3) 受験番号と科目名の裏の部分には、何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を区間 $[0, 1]$ で定義された非負連続関数とする. 任意の $b > 0$ に対して, 等式

$$\int_0^a f(x)dx = b \int_a^1 f(x)dx$$
 を満たす $a \in [0, 1]$ が存在することを示せ. また, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $b = 2$ としたとき, a の値を求めよ.

(2) 2次以下の1変数多項式のなす実ベクトル空間 $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \text{ は実数}\}$ を考える. V 上の線形変換 T を $T(f(x)) = f(2+3x)$ で定義する.

(2-a) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する線形変換 T の表現行列 A を求めよ.

(2-b) (2-a) で得られた A の固有値および線形変換 T の固有値をそれぞれ求めよ.

2. 複素関数 $f(z) = e^{z/4}$, $g(z) = e^z + 1$ を考える. また, R を正の実定数とし, 複素平面上の $-R$ を始点とし, 終点 R に至る線分を C_1 , 始点 R から終点 $R + 2\pi i$ に至る線分を C_2 , 始点 $R + 2\pi i$ から終点 $-R + 2\pi i$ に至る線分を C_3 , 始点 $-R + 2\pi i$ から終点 $-R$ に至る線分を C_4 とする. そして $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ とおく.

(1) $g(z) = 0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた複素数が $\frac{f(z)}{g(z)}$ の1位の極であることを用いて, 複素積分 $\int_C \frac{f(z)}{g(z)} dz$ の値を求めよ.

(3) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} \frac{f(z)}{g(z)} dz = 0$ および $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_4} \frac{f(z)}{g(z)} dz = 0$ を示せ.

(4) (2) と (3) の結果を用いて, 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/4}}{e^x + 1} dx$ の値を求めよ.

3. 独立変数 x , 従属変数 y に関する微分方程式

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (*)$$

の二つの解 $y = y_1(x)$, $y_2(x)$ に対し, ロンスキアン $W(x)$ を次式で定義する.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

(1) $W(x)$ が微分方程式 $W' = -a(x)W$ を満たすことを示せ.

(2) $x \geq 0$ とする. $a(x)$, $b(x)$ および微分方程式 (*) の解の一つ $y_1(x)$ を次式で与える.

$$a(x) = -\frac{3x+4}{3x+1}, \quad b(x) = -\frac{6x+5}{3x+1}, \quad y_1(x) = e^{-x}$$

また, $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ とする. $W(x)$ と $y_2(x)$ を求めよ.